# Ch. 2 — Systèmes linéaires

## 1 Produit cartésien

### 1.1 Produit cartésien de deux ensembles

**Définition 1.**

On appelle *couple* la donnée ordonnée de deux éléments, appelés les *composantes* du couple.

Deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales :

$$(x;y) = (x';y') \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

**Définition 2.** *Produit cartésien*

Soit $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle *produit cartésien* de $E$ et $F$, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples de la forme $(x;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit,

$$E \times F = \{(x;y) \; ; \; x \in E \; \text{ et } \; y \in F\}$$

**Exercice n° 1.** On considère les ensembles $E = \{0,1,2\}$ et $F = \{a,b,c,d\}$. Déterminer $E \times F$ et $F \times E$.

### 1.2 Produit cartésien de $n$ ensembles

**Définition 3.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle $n$*-uplet* (ou $n$*-liste*) la donnée ordonnée de $n$ éléments, appelés les composantes du $n$-uplet.

**Remarque.** Deux $n$-uplets sont égaux ssi leurs composantes sont égales.

**Définition 4.** *Produit cartésien de n ensembles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1$, $E_2$,..., $E_n$ $n$ ensembles.
On appelle *produit cartésien* de $E_1$ $E_2$ ...$E_n$ (dans cet ordre), et on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble de tous les $n$-uplets de la forme $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ où $x_1 \in E_1$ ... $x_n \in E_n$

**Cas particulier.** Soit $E$ un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ se note $E^n$.

**Exercice n° 2.** Soit $E = \{a;b\}$, $F = \{a;c\}$ et $G = \{x;y;z\}$. Déterminer $E \times F \times G$

## 2 Généralités sur les systèmes linéaires

Une *équation linéaire* en les inconnues $x_1$,..., $x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

où $b$ et les coefficients $a_1$, $a_2$,..., $a_n$ sont des réels. En particulier dans une équation linéaire, ne peuvent figurer des termes comme $x_1^4$, $x_1 \cdot x_5$, $\sqrt{x_6}$, $\frac{1}{x_2}$, à moins qu'ils ne disparaissent après simplification...

**Définition 5.**

On appelle *système linéaire* tout système d'équations de la forme

$$\Sigma \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} p \text{ inconnues} \\ n \text{ équations} \end{array} \right.$$

- $(x_1; \dots; x_p)$ est appelé l'inconnue ou le $p$-uplet inconnu.
- $(b_1; b_2; \dots; b_n) \in \mathbb{R}^n$ est appelé le second membre.
- Les $a_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) s'appellent les coefficients du système.

**Définition 6.**

On appelle *solution* du système $\Sigma$ tout $p$-uplet $(x_1; \dots; x_p) \in \mathbb{R}^p$ pour lequel les $n$ équations sont vérifiées.

Si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions, on a $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p$.

**Définition 7.**

On dit que le système $\Sigma$ est *carré* lorsqu'il comporte le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$).

**Définition 8.**

Un système qui admet
| au moins une solution
| aucune solution
| plusieurs solutions (voire une infinité)

est dit
| *compatible*
| *incompatible*
| *indéterminé*

**Remarque.** En particulier, un système indéterminé est compatible.

**Définition 9.**

Un système est dit *homogène* lorsque tous les termes du second membre sont nuls.

**Remarque.** Un système homogène est toujours compatible, car il admet toujours au moins une solution, à savoir le $n$-uplet nul $(0; \dots; 0)$ appelé la *solution nulle*.

**Exercice nº 3.** Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y\sqrt{2} = 3 \\ x\sqrt{2} + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0.4\,x - 0.6\,y = -1.2 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

Ces trois cas illustrent le résultat général suivant qui sera énoncé un peu plus loin :

➩ *Un système linéaire a*
| *soit aucune solution,*
| *soit exactement une solution,*
| *soit une infinité de solutions.*

# 3 Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot

## 3.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

Lorsque l'on cherche à résoudre un système linéaire en utilisant des substitutions d'inconnues ou des combinaisons linéaires d'équation, la difficulté principale est de transformer à chaque étape le système en un système qui lui soit *équivalent*. Si ce n'est pas le cas, on rajoute (en général sans s'en apercevoir) des solutions au système initial.

Dans ce chapitre, on expose la méthode du pivot de Johann Carl Friedrich Gauss. Cet algorithme était déjà référencé dans l'important livre chinois *Jiuzhang suanshu* ou *Les neuf chapitres sur l'art mathématique*, dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de 18 exercices. Dans son commentaire très détaillé daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang chancelier de l'empereur de Chine au IIe siècle avant Jésus-Christ.
L'algorithme de Gauss consiste à ne s'autoriser, comme manipulations sur les équations du système, que trois types d'opérations dites élémentaires dont il est clair qu'elles sont réversibles.

**Définition 10.**

On appelle *opération élémentaire sur les lignes* (en abrégé OEL) d'un système linéaire une opération de l'une des trois formes suivantes :

*(i)* ajouter à une équation un multiple d'une *autre* équation,
*(ii)* échanger deux équations,
*(iii)* multiplier une équation par un réel *non nul*.

Si on note $L_j$ l'équation linéaire qui se trouve sur la $i$-ème ligne du système étudié, on code les opérations élémentaires de la manière suivante :

| ***opération élémentaire sur les lignes*** | ***codage*** |
|---:|---|
| ajouter à une équation un multiple d'une *autre* équation | $L_i \hookleftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ |
| échanger deux équations | $L_i \leftrightarrow L_j$ |
| multiplier une équation par un réel *non nul* | $L_i \hookleftarrow \mu \cdot L_i$ avec $\mu \neq 0$ |

L'idée de la méthode du pivot est de mettre le système sous forme triangulaire. Exposons-la sur un exemple :

**Exercice n° 4.** Soit à résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 5z = 1 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

En résumé, cet algorithme consiste à se servir du terme en $x$ dans la première équation pour éliminer les termes en $x$ dans les autres équations. Puis on se sert du terme en $y$ de la deuxième équation pour éliminer les termes en $y$ des équations suivantes. Et ainsi de suite.
Une fois arrivé à un système triangulaire, il suffit de remonter depuis la dernière équation pour en déduire de proche en proche les valeurs des autres inconnues.
Le point clé de cette méthode est qu'à chaque étape le système est modifié sans que l'ensemble des solutions le soit. Précisons ce point en commençant par définir la notion de système équivalent.

**Définition 11.** *Systèmes équivalents*

Deux systèmes sont dits *équivalents* si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Si l'on examine chacun des trois types d'opérations élémentaires sur les lignes, on constate que ces opérations sont toutes réversibles :

| ***opération élémentaire*** | ***opération inverse*** |
|---|---|
| $L_i \hookleftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ | $L_i \hookleftarrow L_i - \lambda L_j$ |
| $L_i \leftrightarrow L_j$ | $L_i \leftrightarrow L_j$ |
| $L_i \hookleftarrow \mu \cdot L_i$ avec $\mu \neq 0$ | $L_i \hookleftarrow \frac{1}{\mu} \cdot L_i$ |

Par conséquent, si un $p$-uplet est solution d'un système, alors il sera solution de toute autre système qui lui est équivalent, *et réciproquement.* Autrement dit :

**Proposition 1.**

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

**Exercice n° 5.** Un étudiant affirme que les deux systèmes suivants sont équivalents : est-ce exact ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & - & z & = & 1 & L_1 \hookleftarrow L_1 - L_2 \\ -\ x & + & y & & & = & 1 & L_2 \hookleftarrow L_2 - L_3 \\ & - & y & + & z & = & -2 & L_3 \hookleftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

## 3.2 Notation allégée

Dans la suite, on utilisera systématiquement la notation allégée consistant à sous-entendre les inconnues et à placer les coefficients du système dans un tableau. Les tableaux utilisés dans cette notation sont appelés des *matrices*.

Par exemple, le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ étant noté $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array}$, on adoptera la terminologie suivante :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est appelée la *matrice* du système et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur *second membre* du système ;
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ est appelée la *matrice augmentée* associée au système.

**Définition 12.**

On dit que deux matrices $A$ et $A'$ sont *équivalentes par lignes*, et on note $A \underset{L}{\sim} A'$, lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

**Remarque.** Si l'on passe d'un système $\Sigma$ à un autre système $\Sigma'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\Sigma'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\Sigma$.

Illustrons encore la méthode du pivot de Gauss sur quelques exemples en employant désormais de manière systématique la notation allégée.

**Exercice n° 6.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$

**Exercice n° 7.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$

**Exercice n° 8.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 11 \\ -3x & - & 6y & - & 8z & = & -30 \\ -4x & - & 8y & - & 11z & = & -41 \end{array}\right.$

# 4 Discussion du nombre de solutions d'un système linéaire

Soit à résoudre un système linéaire $\Sigma \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$

de matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, de second membre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, et de matrice augmentée $(A \mid b)$.

On commence par réduire la matrice augmentée sous une forme échelonnée, par exemple :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{array}\right)$$

Les carrés '$\blacksquare$' désignent les coefficients non nuls qui se trouvent en « tête de ligne » : on les appelle les *pivots*.
On appelle *rang* du système le nombre de pivots, et on le note $r$ dans ce qui suit.
Les $(n-r)$ dernières équations sont de la forme $0 = \alpha_i$.
Discutons le nombre des solutions du système.

- Si l'un des coefficients $\alpha_i$ est non nul, alors le système est incompatible.
- Si tous les coefficients $\alpha_i$ sont nuls, alors le système est compatible.
  - Si le rang $r$ du système vaut $p$, alors il y a une unique solution.
  - Sinon, il y a une infinité de solutions. Les $r$ inconnues qui correspondent aux colonnes pivots (appelées *inconnues principales*) s'expriment alors en fonction des $p-r$ inconnues qui correspondent aux colonnes non pivots (appelées *inconnues secondaires*). La valeur de chaque inconnue secondaire pouvant être fixée arbitrairement, l'ensemble des solutions sera paramétré par $p-r$ paramètres ou degrés de liberté.

**Exercice nº 9.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 2z & - & 2t & = & 2 \\ 3x & + & 3y & - & 3z & + & 9t & = & 12 \\ 4x & + & 4y & - & 2z & + & 11t & = & 12 \end{array}\right.$

**Exercice nº 10.** Discuter le nombre de solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & a \\ 3x & - & 4y & = & b \\ x & + & y & = & c \\ -5x & + & 3y & = & d \end{array}\right.$ d'inconnues $x$ et $y$.

## 5 Systèmes carrés d'ordre 2

On considère le système $(\Sigma)$, carré d'ordre 2, $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$, c'est-à-dire, sous forme allégée, $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array}\right)$

**Définition 13.**

On appelle *déterminant* du système $\Sigma$ la quantité $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

**Théorème 1.** *Formules de Cramer*

Le système $\Sigma$ admet une unique solution ssi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Dans ce cas, l'unique couple solution est donné par $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ où $\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

**Remarque.** En notant $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ la matrice du système, on remarque que :

- le déterminant $\Delta_x$ est le déterminant de la matrice déduite de $A$ en remplaçant sa première colonne par le second membre $b$ ;
- le déterminant $\Delta_y$ est le déterminant de la matrice déduite de $A$ en remplaçant sa deuxième colonne par le second membre $b$.

**Exercice nº 11.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} \cos(\theta)x & - & \sin(\theta)y & = & 1 \\ \sin(\theta)x & + & \cos(\theta)y & = & -1 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y)$, de paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

## 6 Exercices supplémentaires

**Exercice n° 12.** Résoudre les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -5 \\ x_1 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_4 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 13x_3 & = & 14 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

**Exercice n° 13.** Résoudre les systèmes homogènes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 4x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 10x_1 & + & 18x_2 & + & 40x_3 & + & 17x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 17x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

**Exercice n° 14.** En discutant suivant les valeurs du paramètre $\alpha$, résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & \alpha \end{array}\right.$

**Exercice n° 15.** En discutant suivant les valeurs du paramètre $\beta$, résoudre : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & \beta y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & \beta z & + & (3-\beta)t & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & \beta t & = & 6 \end{array}\right.$