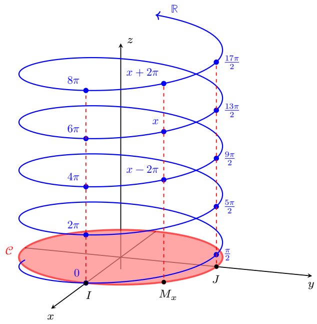
CH. 1 — RAPPELS DE TRIGONOMÉTRIE

1 Fonctions trigonométriques

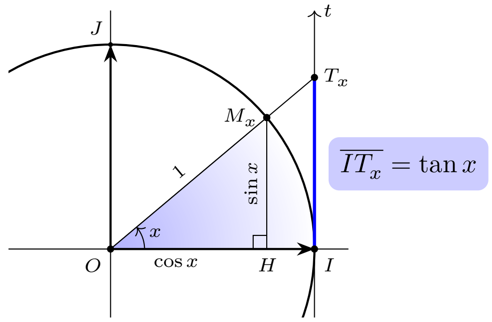
1.1 Rappels



À tout réel x, on associe un point M_x du cercle trigonométrique par enroulement de la droite réelle sur le cercle.
Le cosinus de x est alors par définition l'abscisse du point M_x et le sinus de x l'ordonnée du point M_x.

De plus, la tangente de x peut se lire sur la droite (It) perpendiculaire à (OI) passant par I : si on note T_x l'intersection de la droite (OM_x) avec la droite (It), alors la tangente de x est la mesure algébrique $\overline{IT_x}$ (c'est-à-dire la longueur du segment $[IT_x]$ affectée du signe « + » si T_x a une ordonnée positive, et du signe « − » sinon).

En effet, dans le triangle (OIT_x), on a $\tan x = \dfrac{\overline{IT_x}}{\overline{OI}} = \overline{IT_x}$



Proposition 1.

- La fonction cosinus est paire et 2π-périodique.
- La fonction sinus est impaire et 2π-périodique.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Exercice nº 1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = 1$ b) $\cos x = 0$ c) $\cos x = -1$ d) $\sin x = 1$ e) $\sin x = 0$ f) $\sin x = -1$

Exercice nº 2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x > 0$ b) $\cos x < -1$ c) $\sin x \leqslant 0$

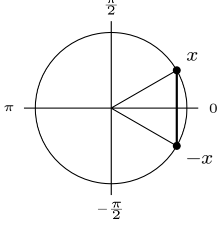
Exercice nº 3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

1.2 Premières formules de trigonométrie

Angles opposés

$\cos(-x) = \cos x$

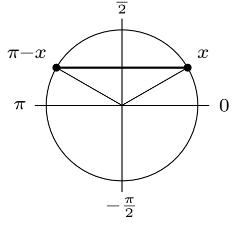
$\sin(-x) = -\sin x$



Angles supplémentaires

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

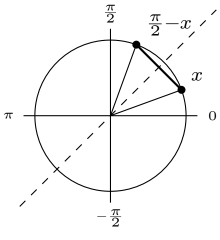
$\sin(\pi - x) = \sin x$



Angles complémentaires

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

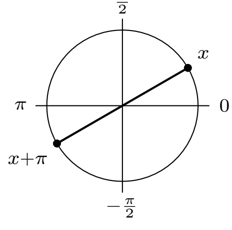
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



Angles différant de π

$\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x$



Exercice nº 4. Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice nº 5. a) Compléter le tableau suivant :

x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					
$\tan x$					

b) Calculer le cosinus et le sinus des réels suivants :

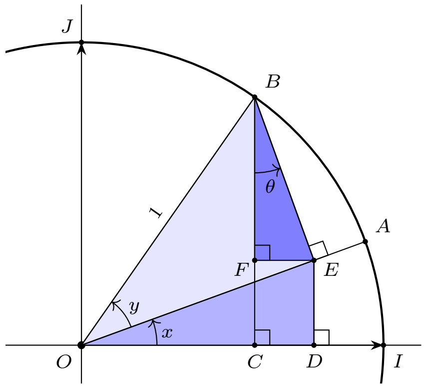
$$-\frac{\pi}{4}\ ;\quad -\frac{2\pi}{3}\ ;\quad \frac{5\pi}{6}\ ;\quad -\frac{3\pi}{4}\ ;\quad \frac{7\pi}{6}\ ;\quad -\frac{11\pi}{6}\ ;\quad \frac{2017\pi}{6}\ ;\quad -\frac{481\pi}{3}\ ;\quad \frac{157\pi}{4}$$

Exercice nº 6. Calculer $\cos a$, sachant que $\sin a = 0.8$ et que $a \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice nº 7. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice nº 8. Soit x et y deux réels vérifiant $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant x+y \leqslant \frac{\pi}{2}$



a) Exprimer les longueurs OE et BE en fonction de y.
b) Exprimer les longueurs OD et DE en fonction de x et y.
c) Exprimer les longueurs OC et BC en fonction de x et y.
d) Exprimer θ en fonction de x ou y.
e) Exprimer les longueurs FE et BF en fonction de x et y.
f) En déduire les relations

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{cases}$$

L'exercice précédent a permis de montrer (sous des hypothèses un peu restrictives) le théorème suivant :

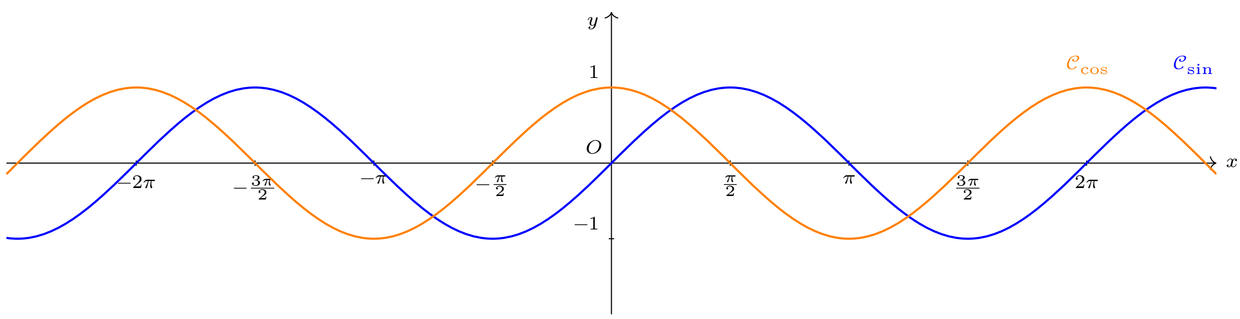
Théorème 1. *Formules de Ptolémée (~150 après Jésus-Christ)*

Pour tous réels x et y, on a :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

1.3 Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus

Pour tracer la fonction sinus, on se restreint à l'intervalle $[0\,;\pi]$, et on complète le tracé par symétrie centrale de centre O (puisque sinus est impaire) puis par translation de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$ (puisque sinus est 2π-périodique).



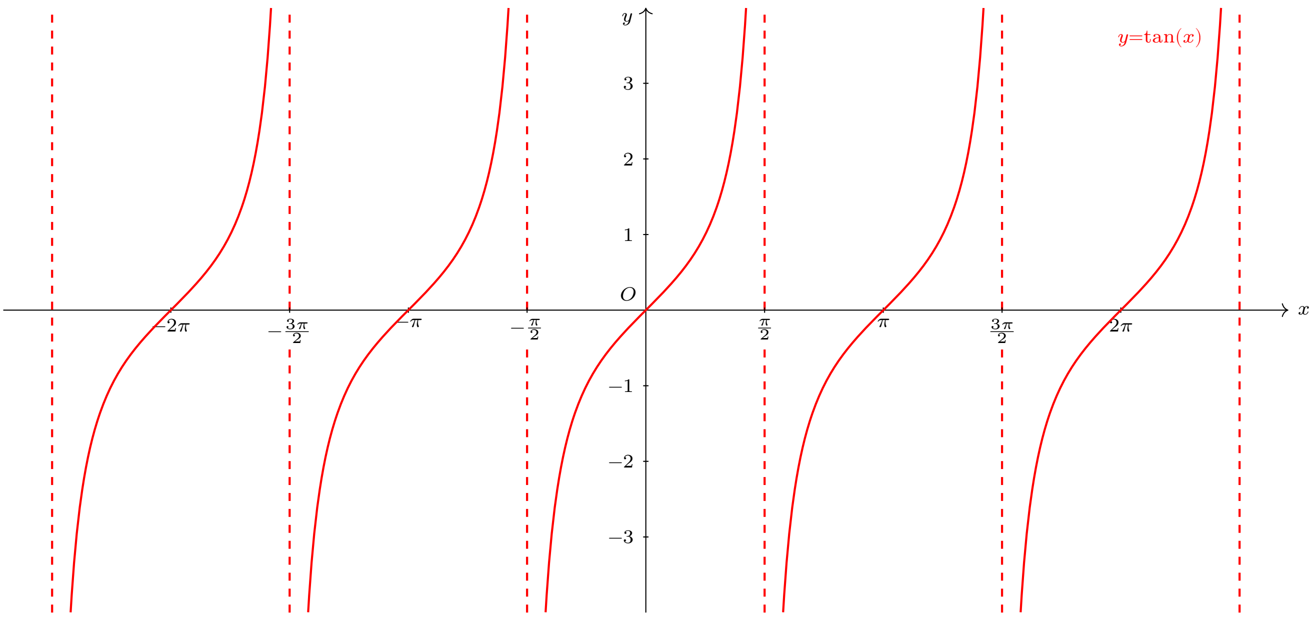
Sachant que $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, la représentation graphique de la fonction cosinus se déduit de celle de la fonction sinus par une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.

1.4 La fonction tangente

Proposition 2.

- La fonction tangente est définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- La fonction tangente est impaire et π-périodique.

Pour tracer la fonction tangente, on se restreint à l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$, et on complète le tracé par symétrie centrale de centre O (puisque tangente est impaire) puis par translation de vecteur $k\pi\vec{\imath}$ (puisque tangente est π-périodique).



Exercice n° 9. Démontrer les relations suivantes :

a) $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad \tan(\pi - x) = -\tan x$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

c) $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

Exercice n° 10. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\tan x = 0$ dans $\mathbb{R}$

b) $\tan x \leqslant 0$ dans $\mathbb{R}$

c) $\tan 2x \geqslant 0$ dans $[-\pi\,;\pi]$

d) $\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ dans $[0\,;2\pi]$

Exercice n° 11. Calculer les tangentes des angles suivants :

$$\frac{\pi}{4} \,;\quad \frac{\pi}{3} \,;\quad \frac{\pi}{6} \,;\quad -\frac{3\pi}{4} \,;\quad \frac{7\pi}{6} \,;\quad -\frac{11\pi}{6} \,;\quad \frac{2017\pi}{6} \,;\quad -\frac{481\pi}{3} \,;\quad \frac{157\pi}{4}$$

Exercice n° 12. Chercher le domaine de définition et une période pour chacune des fonctions suivantes :

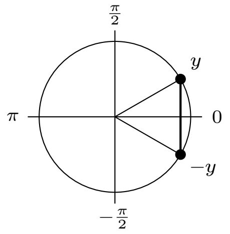
a) $f\colon x \longmapsto \tan 2x$

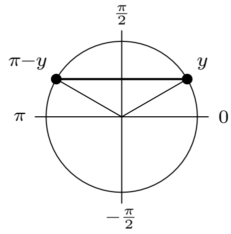
b) $g\colon x \longmapsto \tan \frac{x}{3}$

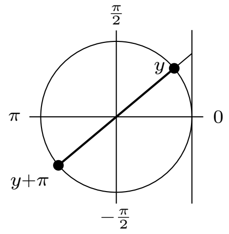
c) $h\colon x \longmapsto \tan 3x + \tan 4x$

2 Équations et inéquations trigonométriques

Notation. Si x et y sont des réels tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$,
on note alors $x \equiv y \ [2\pi]$ et on lit « x est congru à y modulo 2π ».







$$\cos x = \cos y \quad \text{ssi} \quad \left| \begin{array}{l} x \equiv y \;\; [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \;\; [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\sin x = \sin y \quad \text{ssi} \quad \left| \begin{array}{l} x \equiv y \;\; [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \;\; [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\tan x = \tan y \quad \text{ssi} \quad x \equiv y \;\; [\pi]$$

Cas particuliers.

$$\begin{array}{rcl} \cos x = 1 & \text{ssi} & x \equiv 0 \;\; [2\pi] \\ \cos x = -1 & \text{ssi} & x \equiv \pi \;\; [2\pi] \\ \cos x = 0 & \text{ssi} & x \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [\pi] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sin x = 1 & \text{ssi} & x \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [2\pi] \\ \sin x = -1 & \text{ssi} & x \equiv -\frac{\pi}{2} \;\; [2\pi] \\ \sin x = 0 & \text{ssi} & x \equiv 0 \;\; [\pi] \end{array} \qquad \tan x = 0 \quad \text{ssi} \quad x \equiv 0 \;\; [\pi]$$

Exercice nº 13. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos 2x = -1$ b) $\cos 6x = 1$ c) $\cos x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice nº 14. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin 8x = 1$ c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

Exercice nº 15. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\tan x = -1$ b) $\tan 2x = 1$ c) $\tan 3x = \sqrt{3}$

Remarque. Pour résoudre une inéquation trigonométrique, on commence par résoudre l'équation sous-jacente.

Exercice nº 16. Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $2\cos x \geqslant 1$ b) $2\cos 3x \geqslant 1$ c) $2\sin x \leqslant \sqrt{2}$

d) $2\sin 4x \leqslant \sqrt{2}$ e) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \leqslant -\frac{1}{2}$ f) $\tan x \geqslant 1$