

Projet Math en Jeans 2021-2022

Lycée Barthou-Pau

Le mouvement des planètes autour d'une étoile

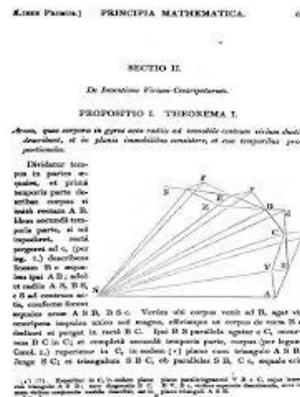
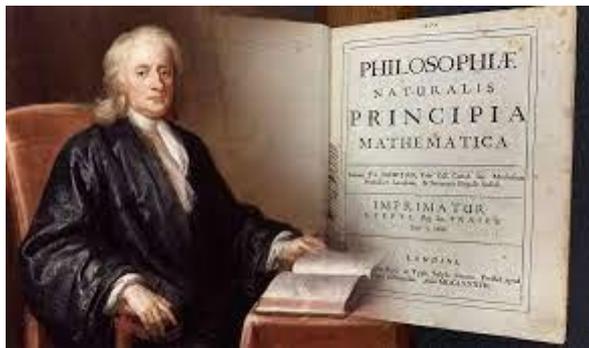
Naissance de la loi de gravitation et démonstration de la loi des ellipses

En suivant l'approche de Newton et Feynman

Jacky Cresson

Université de Pau et des Pays de l'Adour

« Les choses simples ont des démonstrations simples », R. Feynmancorrigé en « les choses simples ont des démonstrations élémentaires ».....



Le but du projet est de démontrer deux résultats importants contenus dans les Principia de Newton qui est son œuvre majeure et qui va révolutionner notre vision du monde et surtout notre façon de le modéliser : la loi des ellipses et le fait que la force qui induit le mouvement est une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance au soleil. Cette force sera appelée gravitation par Newton.

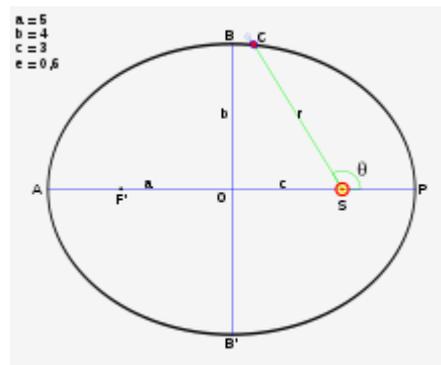
Dans les cours de Physique, ces lois sont habituellement démontrées en se donnant la force de gravitation et à l'aide d'équations différentielles, donc d'équations faisant intervenir des dérivées des coordonnées de la position d'une planète au cours du temps et en prenant comme principe physique essentiel la loi fondamentale de la dynamique de Newton. Ces éléments sont non triviaux. Ce qui est intéressant, c'est que ce n'est pas du tout l'approche de Newton dans les Principia. Dans son livre, Newton fait de la géométrie dite « élémentaire ». Il trace des triangles, calcul des aires et la plupart du temps manipule des formes polygonales. Les courbes comme les ellipses ou les cercles apparaissent comme découpage limite : si on regarde un polygone régulier avec de plus en plus de sommets, alors à la fin, on a un cercle. Les démonstrations de Newton sont donc accessibles par toute personne ayant quelques connaissances de géométrie. Cela ne veut pas dire qu'elles sont simples et c'est là l'origine de la correction par Feynman de la phrase du haut. Les démonstrations seront élémentaires dans le sens où seulement des outils de géométrie élémentaire sont à manipuler, mais elles ne seront pas vraiment simples. Alors, comment allons-nous procéder pour s'introduire dans les travaux de Newton et leur relecture par Feynman ?

Etape 1 – Les lois de Kepler – un peu d’histoire

Tout d’abord, il faut savoir ce qui était connu sur le mouvement des planètes au moment où Newton entreprend son travail. Essentiellement, il a sous la main les trois lois de Kepler :



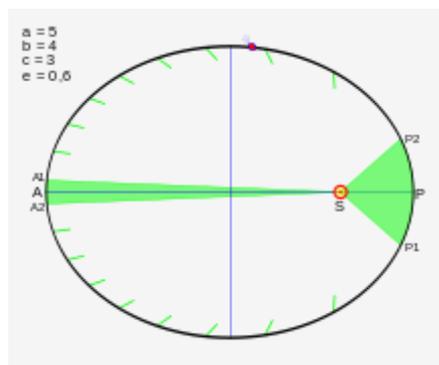
Loi 1 de Kepler dite loi des ellipses : *les planètes se déplacent sur des ellipses dont le soleil occupe l’un des foyers*



Pour comprendre cette loi, il faut donc savoir ce qu’est une ellipse et comment caractériser ce type de courbes. Ce sera le premier travail à faire. On doit se familiariser avec les termes d’excentricité, de demi-grand axes, etc.

La loi 2 de Kepler sera fondamentale dans ce que nous allons faire :

Loi 2 de Kepler dite loi des aires : *des aires égales sont balayées en des temps égaux.*



Il y a enfin la troisième loi de Kepler dite loi des périodes ou loi harmonique (il faut se rappeler que Kepler a essayé de relier la position des planètes avec une construction purement géométrique basée sur les polyèdres réguliers censée représenter l'harmonie du monde) :

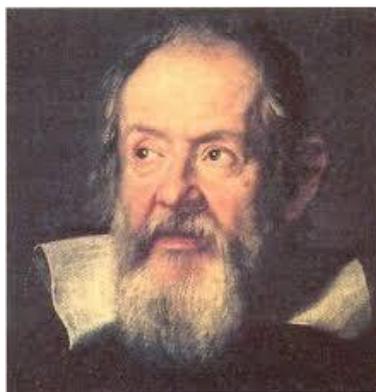


Loi 3 de Kepler ou loi des périodes : *le carré du temps mis par une planète pour accomplir une révolution complète autour du soleil s'accroît comme le cube de la distance de la planète au soleil.*

Bien entendu, la distance de la planète au soleil n'est pas constante mais nous reviendrons sur ce point.

Etape 2 – Le cadre de travail de Newton – les trois lois de Newton

Newton va essayer de retrouver ces lois en utilisant sa vision de la mécanique du point, c'est-à-dire sa manière de modéliser le mouvement d'un point matériel. Pour cela, il a à sa disposition la **loi d'inertie de Galilée** :



Si aucune force ne s'applique à un corps, alors celui-ci reste immobile si il était immobile et continue en ligne droite suivant la direction de sa vitesse initiale avec une vitesse uniforme sinon. C'est le mouvement le plus simple.

La seconde loi de Newton est la **loi fondamentale de la dynamique**: *la variation de la vitesse v notée Δv d'un point matériel entre deux instants t_i et t_{i+1} , est proportionnelle à la force appliquée F multiplié l'incrément de temps $\Delta t = t_i - t_{i+1}$. Cette loi s'écrit*

$$\Delta v = F \Delta t$$

L'équation ci-dessus s'appelle une équation aux différences finies. L'incrément de temps peut être choisi aussi petit que l'on veut. La relation doit être vraie.

Pour compléter ces deux lois de Newton, il en faut une troisième que nous pourrions passer sous silence dans un premier temps. Nous allons remplacer le soleil et une planète par un point de masse celle du soleil et celle de la planète respectivement. Est-ce bien raisonnable de remplacer une planète par un point de masse équivalente ? C'est ici que la troisième loi entre en jeu car c'est le centre de gravité qui est important pour décrire le mouvement d'un corps. Si on suppose qu'une planète est une sphère homogène, c'est-à-dire dont la masse est uniformément répartie, alors ce centre de gravité est le centre de la sphère et on peut donc tout faire en « oubliant » la planète et en raisonnant seulement avec un point.

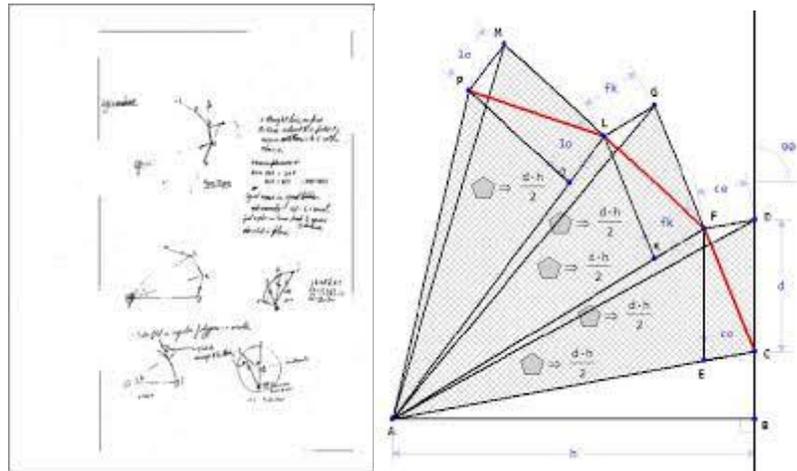
Nous voilà donc arrivé au début de ce projet : est-il possible de retrouver les lois de Kepler à partir des lois de Newton en précisant un type de force ?

La réponse est oui et c'est justement ce qui va révolutionner la physique. Kepler déduit ses lois de l'observation. Il n'a pas d'idée sur pourquoi les planètes se déplacent de cette façon, mais elles le font. De la même manière, observer l'évolution d'une épidémie vous dit qu'elle passe par une phase exponentielle de contamination puis atteint un seuil pour descendre. Quelques fois, de nouvelles vagues sont observées. On peut déterminer la forme des courbes typiques d'une épidémie, mais cela ne dit pas pourquoi cela se passe comme ça. Les lois de Newton sont des hypothèses sur la nature physique du monde. Les lois de Kepler sont des mises en forme d'observations d'un phénomène. Les lois de Newton s'appliquent aux confins de l'univers. Les lois de Kepler s'appliquent au système solaire. On voit le changement de portée entre les deux approches.

Le but de Newton va donc être de comprendre si une force peut être construite explicitement de façon à rendre compte complètement des trois lois de Kepler et en particulier de la loi des ellipses. Nous allons donc voir ça.

Etape 3 – La seconde loi de Kepler implique une force dirigée vers le soleil

Le mouvement d'une planète va être étudiée par Newton en utilisant les 3 lois ci-dessus. Il va donc positionner le soleil. Positionner une planète et lui donner une certaine vitesse initiale. Si il n'y avait aucune force, alors par le principe d'inertie de Galilée, la planète partirait en ligne droite avec une vitesse constante uniforme.

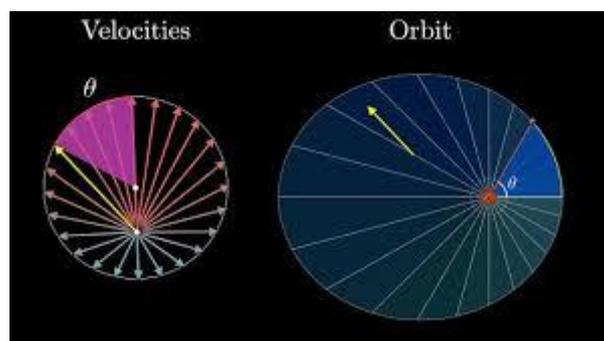


Newton va donc faire le dessin du trajet sans force de la planète. La force va s'appliquer et ramener la planète vers le soleil. Si l'on suit cette procédure sur de petits intervalles de temps de taille égale, la figure va se répéter. C'est le diagramme des orbites et il traduit de manière géométrique la signification des deux lois de Newton.

On peut aussi traduire la seconde loi de Kepler sur ce diagramme. Les aires des différents triangles doivent être égales. On verra alors qu'il n'y a pas de choix pour la force qui agit. Celle-ci doit être centrale et on verra même que le mouvement doit se placer dans un plan. Cette idée d'une force centrale avait été envisagée par Kepler lui-même, mais ici une démonstration géométrique l'impose.

Etape 4 – la troisième loi de Kepler implique une force proportionnelle à l'inverse du carré de la distance au soleil – naissance de la force de gravitation

La troisième loi de Kepler implique que la force centrale que Newton a introduit à l'étape 3 est inversement proportionnelle au carré de la distance au soleil. Pour le faire, nous reprendrons la construction de Newton qui est entièrement géométrique. Elle fait intervenir deux objets géométriques :



Le premier est le **diagramme des orbites**, c'est-à-dire ; une figure où l'on représente les positions successives de la planète à différents temps.

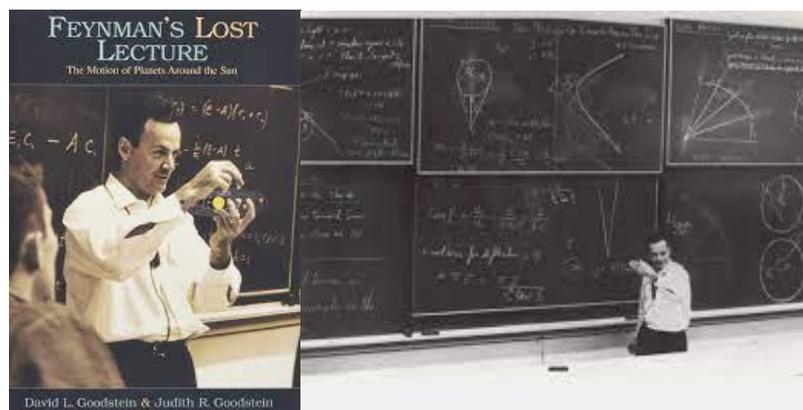
Le second est le **diagramme des vitesses** qui donne l'évolution du vecteur vitesse à ces mêmes temps.

La seconde loi de Newton lie la variation des vitesses pendant un intervalle de temps donné à la force multipliée par cet intervalle de temps. La traduction de la troisième loi de Kepler sur ces diagrammes nous permettra donc de déterminer la forme explicite de la force.

Nous aurons donc à la fin de cette étape une force d'une nature particulière. Newton lui donnera le nom de force de gravitation. Il nous reste à explorer ce que cette force de gravitation a comme pouvoir pour modeler le mouvement des planètes. Est-ce que cette force de gravitation, couplée aux trois lois de Newton sur la nature du monde, force les planètes à rester sur une ellipse comme Kepler l'a démontré ? ou faut-il rajouter un autre effet ? Autrement dit, est-ce que la force de gravitation suffit à elle seule à expliquer ce que nous voyons dans le système solaire ?

Etape 5 – le Graal : les lois de Newton impliquent la loi des ellipses

C'est l'étape décisive. Nous allons mettre en action les deux lois de Newton avec la force de gravitation et voir si nous pouvons déduire la loi des ellipses. Ici nous suivrons l'approche de Feynman qui diffère un peu de celle de Newton mais qui reste de nature géométrique.



Le diagramme des vitesses qui sera un cercle et le diagramme des orbites dont nous démontrerons qu'il doit être une ellipse seront essentiels. Pour cela, nous aurons préparé quelques caractérisations de l'ellipse à l'étape 1.

Voilà, en gros le programme que nous allons suivre.

